Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica

Vicenç Font
Universitat de Barcelona, España
Norma Rubio
Pontificia Universidad Católica del Perú

Abstract. *This paper presents a theoretical development of the Onto-Semiotic Approach (OSA) through the incorporation of the notion of "process" within this theoretical framework. First we show how the use of the construct "epistemic configuration of mathematical objects" in conjunction with certain mathematical processes allows a better analysis of mathematical practices. Second, we delves into the processes of idealization and generalization. Finally, we proposed to consider a set of 16 processes that are derived from the theoretical framework and use them (metaphorically) as a vector basis for studying processes. This methodology is applied to study the processes of representation and the metaphorical processes.*

Keywords: process, idealization, generalization, representation, metaphorical processes

Resumen. *En este trabajo se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática afrontando la problemática del encaje de los "procesos" dentro de dicho marco teórico. Primero se muestra cómo el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. Después se profundiza en los procesos de idealización y generalización. Por último, se propone considerar un conjunto de 16 procesos que se derivan del marco teórico y usarlos (metafóricamente) como una base vectorial para estudiar procesos. Esta metodología de estudio se aplica a los procesos de representación y a los metafóricos.*

Palabras clave: procesos, idealización, generalización, representación, procesos metafóricos

1. Introducción

En diversos trabajos Godino y colaboradores han desarrollado el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras, & Font, 2006; Godino, Batanero, & Font, 2007 y 2008; Font, Planas, & Godino, 2010; Font, Godino, & Gallardo, 2013) a partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho enfoque.

El primer objetivo de este trabajo es mostrar como el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos considerados en el EOS permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. El segundo es explicar cómo se entienden en el EOS algunos de los procesos considerados en dicho enfoque, en concreto en este artículo se explica la manera de entender los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización. El tercero es afrontar, en el marco del EOS, la problemática de la relación entre algunos de los procesos considerados en el marco teórico y la problemática de cómo tratar otros procesos no considerados directamente en dicho marco.

La estructura de este artículo es la siguiente, en la sección 2 se comenta muy brevemente el marco teórico del EOS. En la sección 3 se presenta una tarea sobre la mediatriz que será utilizado como contexto de reflexión. En la sección 4 se hace un primer análisis de dicha tarea utilizando el constructo "configuración epistémica". En la sección 5 se amplía el análisis de la sección anterior focalizando la atención en los procesos de materialización – idealización y particularización – generalización. En la sección 6 se profundiza en el papel que juegan los elementos genéricos en los procesos de particularización y generalización. En la sección 7 se reflexiona, utilizando como contexto el caso del proceso de representación, sobre el hecho de que los procesos considerados en el EOS no se pueden considerar de manera aislada y se propone que una de las maneras de estudiar esta relación es analizar el proceso desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. En la sección 8, después de poner de manifiesto que los procesos contemplados en la actual síntesis del EOS no cubren todos los posibles procesos a tener en cuenta en la actividad matemática, se toma como contexto de reflexión uno de los no contemplados, los procesos metafóricos, y se sigue el mismo análisis realizado en la sección anterior, es decir también se analizan desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. El artículo termina con unas consideraciones finales.

2. Marco teórico

En la Figura 1 se sintetizan una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono). Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono). Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la Figura 1.

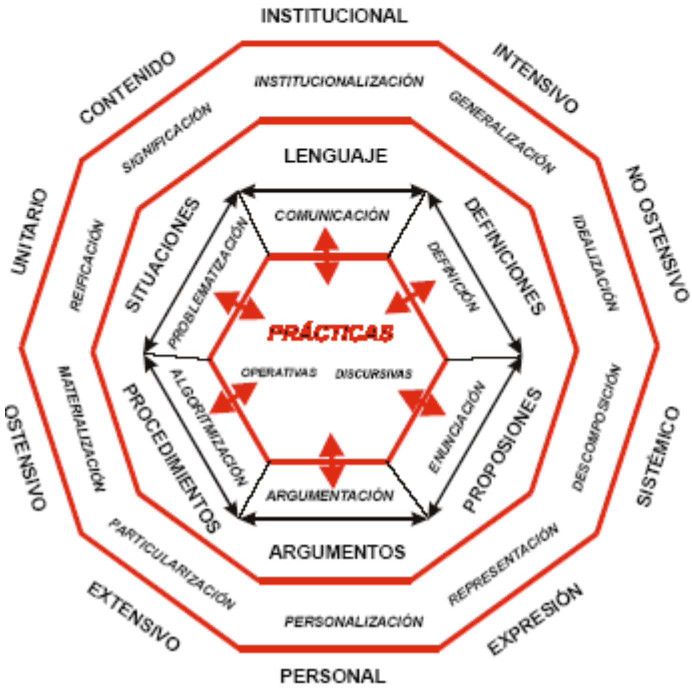


Figura 1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la Figura 1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

> La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como “hiper-procesos” matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio

> requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero, & Font, 2006, p. 9)

3. Una tarea como contexto de reflexión

Vamos a utilizar, como contexto de reflexión para mostrar el tipo de aplicación que hacemos de algunos de los constructos teóricos elaborados por el enfoque ontosemiótico, la siguiente tarea (Font & Godino, 2006).

> *Tarea:* La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri:
>
> a) Halla una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz.
>
> b) Demuestra esta propiedad.
>
> c) Da una nueva definición de mediatriz.
>
> d) Halla a partir de los apartados anteriores un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

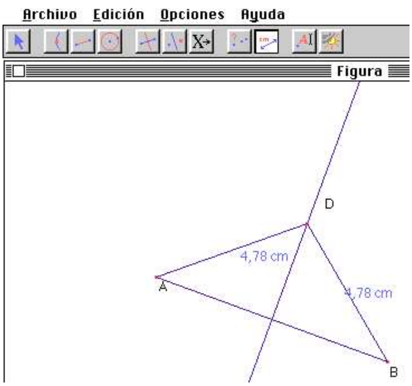


Figura 2. La mediatriz con el Cabri.

4. Configuraciones epistémicas

En el currículum de algunos países los tipos de “objetos matemáticos” que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una “ontología” demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (Figura 3) cuyo análisis nos informa de la “anatomía de un texto matemático”. Si además de la “estructura” interesa analizar su “funcionamiento” con alumnos son necesarias otras herramientas, en especial los procesos contemplados en la Figura 1. En este trabajo nos proponemos aplicar tanto los procesos de la Figura 1 como las configuraciones epistémicas (o cognitivas, según se mire desde la perspectiva institucional o personal) al análisis de una práctica matemática.

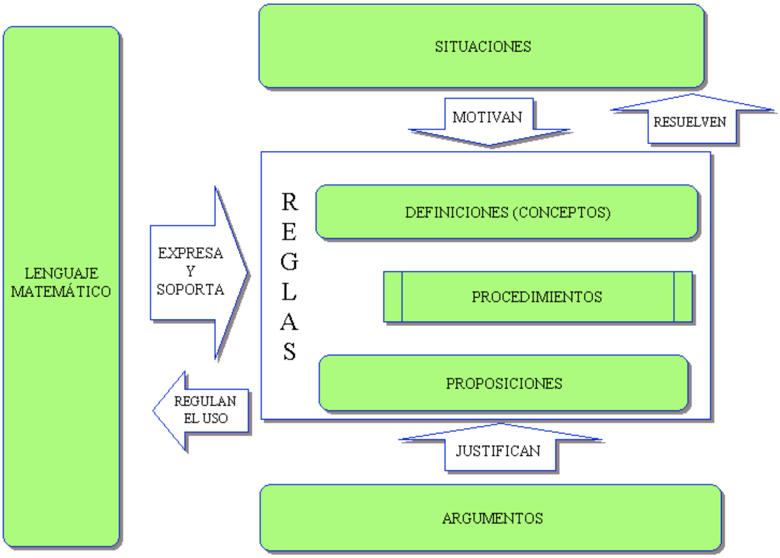


Figura 3. Componentes y relaciones en una configuración epistèmica.

Entendemos por práctica del alumno la lectura de la tarea y su resolución. La herramienta “configuración epistémica” nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica que debe realizar un alumno hipotético (para cada alumno concreto, tendríamos una configuración cognitiva). La configuración epistémica asociada es la siguiente:

Tabla 1
Configuración epistémica “emergente” asociada a la mediatriz

LENGUAJE
Verbal
mediatriz, segmento, recta perpendicular, punto medio etc.
Gráfico
- Figura geométrica dinámica
Simbólico:
A, B, …

SITUACIONES
- Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se ha de hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.

CONCEPTOS
Previos
- Segmento, recta perpendicular, punto medio - Mediatriz (definida como recta perpendicular que pasa por el punto medio)
Emergentes
- Mediatriz (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento)

PROCEDIMIENTOS
Emergente - Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz

PROPOSICIONES
- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud - La recta perpendicular forma un ángulo de 90º con el segmento - …. *Emergente* Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

ARGUMENTOS
- Justificación visual de la propiedad "Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento". - Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos. - Demostración deductiva (?)

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Puesto que se trata de una configuración epistémica cuyo objetivo es la emergencia de nuevos objetos es evidente que propicia claramente algunos de los procesos que se hallan en el interior del hexágono, como son los procesos de enunciación (apartado a), argumentación (apartado b) definición (apartado c) y algoritmización (apartado d).

En este trabajo no entraremos en el análisis de estos 4 procesos, algunos de los cuales ya han sido objeto de investigaciones específicas en el marco del EOS. Por ejemplo, Godino y Recio (1997), utilizando el marco ontosemiótico, analizaron los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Su conclusión es que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la prueba, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.

5. Materialización-idealización y particularización-generalización

Además de los 4 procesos anteriores, en la resolución de la tarea se activan algunos de los procesos asociados a las facetas duales (decágono exterior). En concreto, vamos a analizar, de acuerdo con Font y Contreras (2008), en esta sección el papel que juegan los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización en esta tarea.

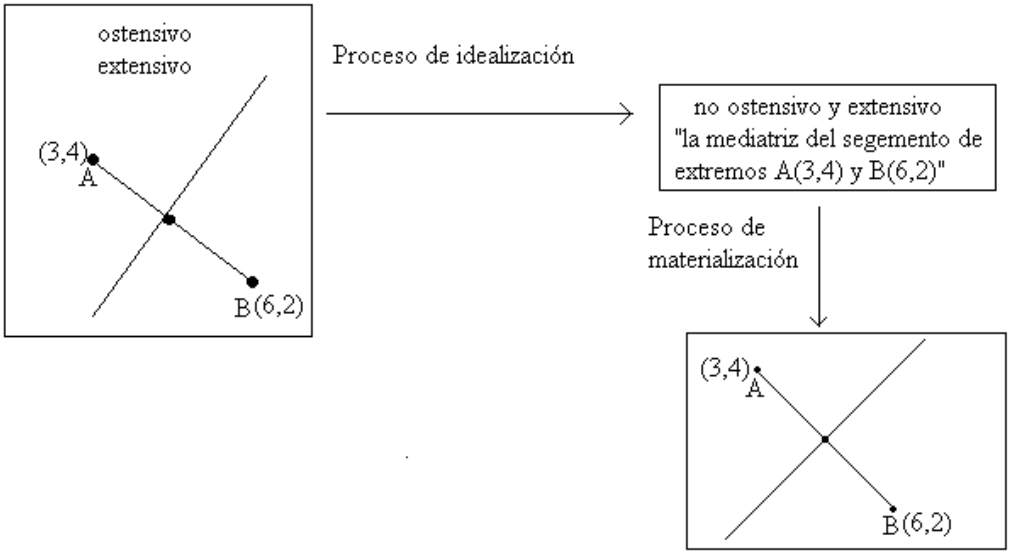
5.1. Procesos de idealización y de materialización

Platón fue uno de los primeros que puso de manifiesto la importancia del proceso de idealización al considerar a los objetos de la experiencia como copias imperfectas de las “ideas” matemáticas. Desde entonces, la necesidad de tener en cuenta el proceso de idealización en la actividad matemática ha sido observada por muchas personalidades ilustres. Por ejemplo, Fischbein (1993) tiene muy en cuenta el proceso de idealización en su teoría de los “conceptos figurales”. También es importante el proceso de idealización (entendido como caso límite de lo concreto) en la obra de Kitcher (1984), este autor sostiene que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. Para Kitcher las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual se le atribuyen poderes de actuación superiores a los que tienen las personas normales -por ejemplo, recorrer los términos de una progresión geométrica. Las acciones nuevas que consideramos que son realizables no son acciones cualesquiera sino aquellas que amplían acciones que se consideran realizables por las personas.

Los mecanismos mediante los cuales las personas, consideradas individualmente o socialmente, llegan a las ideas matemáticas y como éstas son materializadas en sistemas de signos a efectos de comunicación son motivo de investigación (directa o indirectamente) en casi todos los programas de investigación que se han desarrollado en el área de la Didáctica de las

Matemáticas. Para citar un solo ejemplo, uno de los programas que están emergiendo con más fuerza en el área, el "embodiment" (Lakoff & Núñez, 2000), se plantea precisamente investigar como las personas generan las ideas matemáticas.

Los procesos de materialización-idealización, en el EOS, están asociados a la faceta ostensivo-no ostensivo. Supongamos que, antes de la tarea comentada en el apartado anterior, el profesor ha dibujado en la pizarra la figura de la izquierda (Figura 4) y que habla sobre ella como si fuera la mediatriz del segmento que tiene por extremos los puntos A(3,4) y B(6,2) esperando, además, que los alumnos interpreten de esta manera dicha figura:



Figuras 4 y 5. Procesos de idealización y de materialización.

Si se observa bien la Figura 4 de la izquierda se tiene que: (1) el segmento no es una segmento de línea recta, (2) la mediatriz no es una recta ya que es sólo un segmento de la mediatriz, (3) además dicho segmento tampoco es un segmento de línea recta, (4) no pasa exactamente por el punto medio, (5) los puntos A y B y el punto medio son muy gruesos, (6) el ángulo que forma la supuesta mediatriz con el segmento no es exactamente de 90º, etc.

Es evidente que el profesor espera que sus alumnos hagan el mismo proceso de idealización sobre la figura de la pizarra que él ha realizado y su discurso sobre ella omite los inconvenientes comentados en el párrafo anterior. Es decir, la figura de la pizarra se constituye en una figura ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que el profesor realiza sobre ella. La figura de la pizarra es una figura concreta y ostensiva (en el sentido que está dibujada con el material "tiza" y es observable por cualquier persona que esté en el aula) y como resultado del proceso de idealización se tiene un objeto (la mediatriz del segmento AB) no ostensivo (en el sentido de que se supone que es un objeto matemático que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos asociados) Por otra parte, este objeto no ostensivo es particular, a saber, es la mediatriz del segmento de extremos A(3,4) y B(2,6) y no es, por ejemplo, la mediatriz del segmento de extremos (4,4) y (8,7). A este tipo de objeto "individualizado" en el enfoque ontosemiótico le llamamos un extensivo. Por tanto, como resultado del proceso de idealización hemos pasado de un ostensivo que era extensivo a un no ostensivo que sigue siendo un extensivo.

La otra cara de la moneda es que para poder manipular los objetos no ostensivos necesitamos representaciones ostensivas, las cuales son el resultado de un proceso de materialización (y también de representación). Siguiendo con el ejemplo de la mediatriz dibujada en la pizarra, el profesor podría darse cuenta que la figura no está muy bien hecha para después borrarla y sustituirla por una figura "más perfecta" (la Figura 5 de la derecha).

En el caso de al Figura 2, actúan los procesos de idealización y materialización ya que se considera que la mediatriz de la pantalla del ordenador es una materialización del objeto matemático "mediatriz del segmento AB".

El proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido ya que se considera que el ostensivo es la representación del no ostensivo. Este hecho tiene algunas implicaciones que queremos resaltar, la primera es que cualquiera de los procesos contemplados en la Figura 1 está relacionado con otros de los procesos también considerados en dicha figura, sobre esta cuestión volveremos en el apartado 5.

La segunda es que la relación de representación se da entre objetos claramente diferentes (ostensivos por una parte y no ostensivos por la otra). Ahora bien, a pesar de que por una parte se acepta que los objetos no ostensivos sólo son accesibles por medio de sus ostensivos asociados, se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo), entre otros motivos porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la "existencia" del objeto matemático como algo independiente de su representación. Wittgenstein (1987) ha sido, seguramente, uno de los filósofos de la matemática que más claramente ha llamado la atención sobre este peligro, para este filósofo la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

5.2. *Procesos de particularización y de generalización*

Los procesos de particularización-generalización, en el EOS, están asociados a la faceta extensivo-intensivo. Los términos extensivo e intensivo están sugeridos por las dos maneras de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por tanto, por extensivo entendemos un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo una clase o conjunto de objetos, que, a su vez, cuando convenga se puede considerar como un objeto.

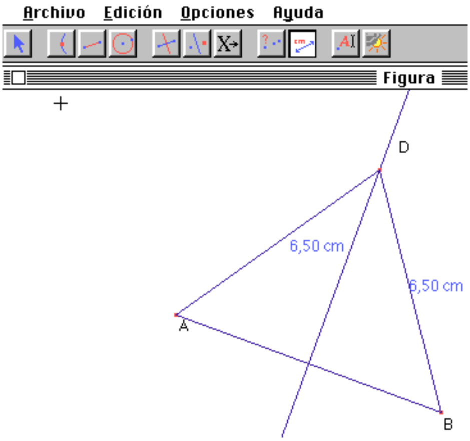
Uno de los orígenes del discurso objetual en matemáticas es la metáfora ontológica, la cual, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos. Esta metáfora permite considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.) o sustancias. Esta metáfora se combina de manera inconsciente con otra metáfora ontológica: la del contenedor (Lakoff & Núñez, 2000). La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades o sustancias que se contienen unas a otras. Dicho de otra manera, uno de los orígenes de la aplicación de la faceta extensivo-intensivo a los objetos matemáticos son las metáforas de tipo ontológico.

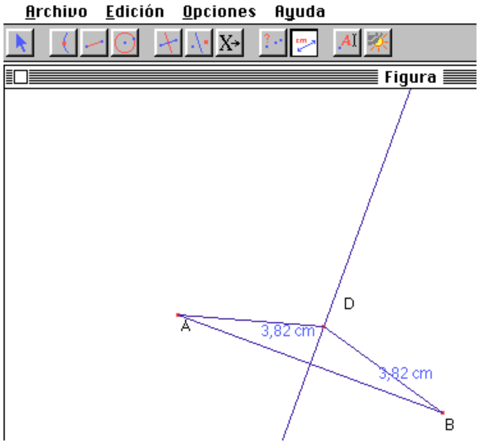
Las metáforas ontológicas en el discurso escolar muchas veces suelen estar implícitas, pero también se pueden presentar de manera más explícita. Por ejemplo, en el *Curso de Geometría* de P. Puig Adam (1965, pág. 4) se observan claramente en los axiomas de existencia y enlace:

> *Ax. 1.1 - Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados <<puntos>> cuyo conjunto llamaremos <<espacio>>.*
>
> *Ax. 1.2 - Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<planos>> y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<rectas>>.*

Los mecanismos que nos ofrece el lenguaje para permitir la particularización o individuación de objetos matemáticos son variados (por ejemplo, los deícticos gramaticales: éste, ése, aquel, ahí, allí, acá, etc. o los determinativos indefinidos: uno, alguno, cualquiera, etc.). También son variados los procesos de generalización (o abstracción) que permiten obtener intensivos. A continuación, vamos a centrar nuestra atención sobre estos últimos. Para ello, volveremos sobre la tarea propuesta en el apartado 2.

Para responder a la tarea, una vez realizada con el ordenador la construcción de la Figura 2, el punto D se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto D y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto D es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos A y B del segmento. Por lo tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos.





Figuras 6 y 7. Invariantes de las acciones.

Este resultado se puede simbolizar de la siguiente manera: los puntos de la mediatriz cumplen la siguiente condición: distancia *AD* = distancia *DB*.

La resolución de la tarea permite la emergencia de "intensivos" (por ejemplo, una nueva definición de la mediatriz). Ahora bien, lo que es importante es observar que esta emergencia es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Hay que destacar que se llega a un intensivo (lo que no varia) a partir de (1) ignorar aspectos de lo concreto (lo que varia) y (2) de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en esta caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso). En el siguiente apartado volveremos sobre este aspecto.

Una de las características de la abstracción reflexiva es que es constructiva, en el sentido que construye intensivos a partir de la reflexión sobre la acción. Ahora bien, podemos considerar otros mecanismos diferentes para obtener intensivos, uno de tipo eliminativo y otro de tipo aditivo. La abstracción empírica funciona por medio de un mecanismo eliminativo, se trata de eliminar o separar aspectos o notas de lo concreto. Por ejemplo, en la Figura 3 se puede considerar que tenemos un ejemplar del tipo "negro" ya que se trata de una figura de color negro o bien considerar que los puntos A, B y el punto medio, el segmento AB y la recta tienen en común que son figuras geométricas, es decir en todos los casos se trata de ejemplares del tipo “figura geométrica”. En este caso, se llega a un intensivo por la aplicación básicamente de la relación tipo/ejemplar, la cual se basa en la aplicación de un mecanismo de tipo eliminativo en base a la relación parte/todo, es decir el intensivo (tipo) se considera una de las partes que componen el extensivo (todo), ya que éste último es un ejemplar concreto que tiene muchas notas o atributos diferentes.

Otro mecanismo diferente para obtener intensivos consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos. Por ejemplo, puedo considerar la mediatriz de la Figura 3 como un miembro (un extensivo) que forma parte de una clase o conjunto (un intensivo). En este último caso se llega a un intensivo también por la relación parte/todo, pero entendida de manera inversa a como se entiende en el caso de la abstracción empírica, la parte (el extensivo) es un miembro de un todo, una clase (el intensivo).

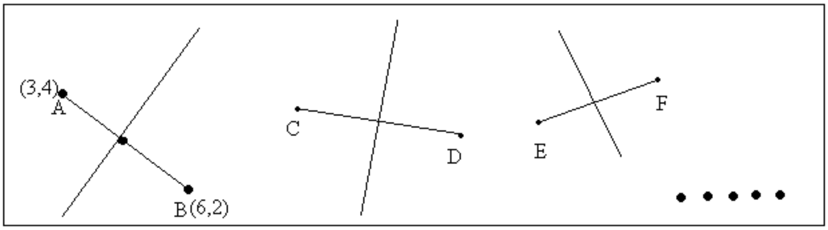


Figura 8. Conjunto de todas las mediatrices.

Estas tres maneras de generar intensivos juegan un papel diferente en las matemáticas, la abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el “contexto de descubrimiento”, mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el “contexto de justificación”, puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas que se fundamenta sobre la teoría de conjuntos.

6. Elementos genéricos y dualidad extensivo / intensivo

Volvamos a la Figura 2 de la tarea que sirve como contexto de reflexión. La principal función que cumple la Figura 2 es (a) introducir un caso particular (variable en este caso) sobre el cual razonar. Una de las características cruciales de la actividad matemática es el uso de elementos genéricos. El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto, es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento.

Ahora bien, con relación al elemento genérico hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

- ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?
- ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?
- El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular al ser considerado como genérico se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular y así sucesivamente.

La faceta extensivo/intensivo resulta un instrumento esencial para analizar la complejidad asociada a estos tres aspectos. Dicho de otra manera, el uso del elemento genérico lleva asociada una compleja trama de funciones semióticas (y por tanto, de representaciones) que relacionan intensivos con extensivos.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos elementos genéricos estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico. A partir del estudio de dichos diálogos, en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005) y Font y Contreras (2008) se ponen en juegos otros constructos del EOS, los cuales permiten que la "complejidad semiótica" asociada al uso de elementos genéricos se concrete en una trama de funciones semióticas (dualidad expresión-contenido) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad extensivo-intensivo).

7. Relación entre procesos: El caso de la representación

Al considerar los procesos de materialización e idealización hemos visto como no pueden ser analizados sin tener en cuenta otros de los procesos contemplados en la Figura 1 (como mínimo el de representación). Una de las maneras de estudiar esta relación en el EOS consiste es situar el proceso que nos interesa primero en el centro del hexágono para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y, segundo, colocarlo en el centro del decágono y analizarlo utilizando las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. A continuación, por cuestiones de espacio, aplicaremos sólo las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales al proceso de representación siguiendo a Godino y Font (2010).

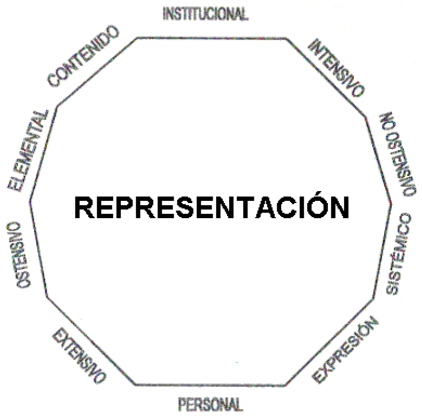


Figura 9. Miradas duales al proceso de representación.

7.1. La representación con relación a la dimensión dual "extensivo / intensivo"

El proceso de representación está relacionado con los procesos de particularización y generalización asociados a la dualidad extensivo-intensivo ya que, constantemente, nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables, a los que nos referimos mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x + 2$, etc.). Sobre estos objetos actúa (de entrada) *la faceta extensivo / intensivo*.

Las explicaciones que se pueden dar para justificar la activación de dicha faceta son diversas. Por ejemplo, un foucaultiano diría que estos objetos ya han sido "*dichos desde algún discurso"*, mientras que desde la filosofía de la ciencia se dirá que "*toda percepción (observación) está cargada de teoría"* ya que todo juicio de percepción supone la aplicación de conceptos (la proposición *A* es *B*). Desde la teoría contemporánea de la metáfora (Lakoff & Núñez, 2000) se dirá que uno de los orígenes de la aplicación de la dualidad extensivo/intensivo son las metáforas ontológicas, las cuales, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos.

7.2. La representación con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Para poder aplicar la faceta extensivo-intensivo a los objetos, estos necesitan un signo que los enuncie (acompañe). Imaginemos que un bebé ha balbuceado algo parecido a "pan". La madre interpreta que quiere "pan" y se lo proporciona al mismo tiempo que le dice "pan". El bebé recibe dos estímulos que se refuerzan mutuamente: (1) por una parte, la emergencia del objeto físico "pan" y (2) por otra parte, la palabra "pan" dicha por el mismo y por su madre.

Si bien puede ser que los niños pequeños no hagan la diferenciación entre signo y objeto, las personas adultas diferencian entre signo y objeto:

> Un signo, o *representamen*, es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición. (Peirce, *Collected Papers*, 2.228)

Puesto que tanto el "signo" como el "objeto" son "algo", hay que tener presente que ambos son objetos. Ser objeto o signo es algo relativo. Por tanto, conviene distinguir entre los objetos y los signos. Es una distinción importante, ahora bien es una diferencia coyuntural y no sustancial, ya que lo que en un momento es signo en otro puede pasar a ser objeto y viceversa. Si bien en la fase de "no diferenciación" el sujeto identifica (confunde) el signo con el objeto, en la fase de "diferenciación" el sujeto está en condiciones, según convenga, de identificar o diferenciar el signo del objeto:

> Estar en lugar de, es decir, situarse en una relación tal respecto a otro que, para ciertos fines, puede considerársele, en algún modo como si fuese ese otro. (Peirce, *Collected Papers*, 2.273)

La posibilidad de diferenciar entre signo y objeto permite que "alguien" pueda establecer una relación diádica (función semiótica) entre "dos objetos" ("algo" por "algo"). En esta relación ("algo" por "algo") normalmente se considera que uno de los objetos (el signo) es una "expresión" que se relaciona con un "contenido" (el otro objeto).

En el EOS se considera que la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por cualquier objeto matemático. En el EOS, las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schütz pasando por Husserl. La interpretación de las funciones semióticas que propone el EOS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

7.3. La representación con relación a las dimensiones duales “ostensivo – no ostensivo” y “personal – institucional”

Si nos formulamos la pregunta: ¿Cómo se relaciona el signo con el objeto? topamos con el problema de la clasificación entre representaciones internas y externas. En el triángulo de la figura siguiente se considera que el signo escrito “reloj” se relaciona con el objeto físico “reloj” por medio del concepto (interpretante) que tiene el sujeto (el interprete).

Normalmente se considera que tanto el concepto como el signo son representaciones. También se considera que la palabra escrita “reloj” es una representación externa y que el concepto es una representación interna (mental).

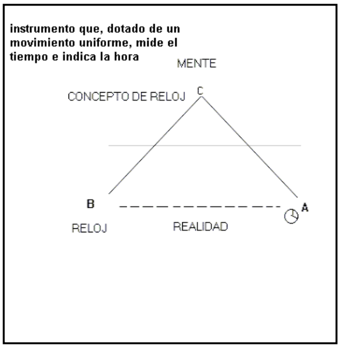


Figura 10. Relación entre signo y el objeto.

Esta primera clasificación en *representaciones mentales o internas* y *representaciones externas* no es en absoluto una clasificación transparente. El motivo es que los objetos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos con soporte material que forman parte del mundo real, y, puesto que se presupone que el sujeto se relaciona con el mundo real por medio de representaciones mentales, resulta que lo que se ha considerado como externo en cierta manera también es interno. La ambigüedad de la clasificación interna/externa ha sido señalada por diversos investigadores. Por ejemplo, Kaput con relación a esta clasificación se pregunta:

> ¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando decimos que “representa” a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente. (Kaput, 1998, p. 267)

En el EOS se considera que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje. En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que se consideran más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo-no ostensivo y personal-institucional.

La distinción ostensivo – no ostensivo se ha de tomar en sentido intersubjetivo: "algo" se puede mostrar a otro directamente versus "algo" no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro "algo", que si se puede mostrar directamente. Cuando se distingue entre los objetos matemáticos y sus representaciones, se considera a dichos objetos como no ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos tiene también una faceta ostensiva, esto es perceptible, ya que se usan en las prácticas por medio de sus ostensivos asociados.

Mediante el lenguaje ostensivo se "expresan" otros objetos no ostensivos. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). A su vez, las entidades no ostensivas necesitan a éstas entidades ostensivas para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello, en el enfoque ontosemiótico el lenguaje es considerado como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial será las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Dependiendo del juego de lenguaje en que nos posicionemos, una misma expresión, por ejemplo "derivada", puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, se considera que se ponen en juego objetos institucionales.

En el proceso de instrucción estamos interesados en la enseñanza de objetos institucionales. Estos objetos se presentan en la actividad matemática por medio de sus ostensivos asociados. Como resultado del proceso de instrucción los alumnos habrán construido sus objetos personales, los cuales se presentaran en su actividad matemática también por medio de ostensivos asociados.

7.4. La representación con relación a la dimensión dual "elemental-sistémico"

Una de las posibles maneras de concebir el significado de una palabra es considerarlo como la abstracción o el universal que se asocia a esa palabra. A su vez, las cosas designadas por el término se consideran ejemplificaciones de ese mismo universal, o a la inversa, éste constituye la esencia de aquel. De esta manera, las palabras y las cosas quedan relacionadas a través de un tercer reino poblado de esencias y significados. Esta concepción, que se puede considerar platónica, se considera en el enfoque ontosemiótico como una manera "elemental" de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar lo que una cosa es, su esencia, es necesario enumerar sus cualidades o los universales que ejemplifica.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva "sistémica" ya que se considera que el significado de un objeto es el conjunto de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

Basta mirar con una perspectiva histórica un objeto matemático cualquiera para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre: (1) un objeto matemático, (2) sus ostensivos asociados, (3) las prácticas que permiten manipular estos ostensivos y (4) las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente a sus ostensivos y prácticas asociadas) para organizar fenómenos – por ejemplo, en Font y Peraire (2001) se hace este estudio para la cisoide. Esta mirada histórica también muestra que las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación. Este hecho tiene implicaciones importantes. A continuación indicaremos tres que se consideran de las más relevantes:

(1) La primera es que las representaciones ostensivas no se pueden entender de manera aislada:

> Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras. (Goldin & Stheingold, 2001, p. 2)

Por este motivo más que hablar de representaciones ostensivas o de signos es conveniente hablar de sistemas de signos.

(2) La segunda es que el hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de

representación, conlleva que "cada representación" se pueda convertir en "objeto representado" de la representación del otro programa de investigación.

(3) La tercera es que una representación ostensiva, por una parte, tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posibles. El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera *elemental* "algo" por "algo". En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera *sistémica*, como el "iceberg" de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita.

En el enfoque ontosemiótico, la introducción de la dualidad elemental-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que cada uno de los diferentes pares objeto/representación (sin segregarlos) posibilita un subconjunto de prácticas del conjunto de prácticas que son consideradas el significado del objeto. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico. Pero, en cada subconjunto de prácticas el par objeto/representación (sin segregar) es diferente, en el sentido de que posibilita prácticas diferentes.Si bien las reflexiones anteriores permiten una visión holística sobre el proceso de representación, es evidente que con ellas no abarcamos toda la complejidad de este proceso. Para una mayor profundización remitimos al lector al trabajo de Font, Godino y D'Amore (2005) en el que se reflexiona sobre la naturaleza y diversidad de objetos que desempeñan el papel de representación y de objetos representados en la actividad matemática. En este trabajo se muestra como los instrumentos teóricos elaborados por el EOS permiten afrontar la siguiente problemática: 1) La naturaleza de los objetos que intervienen en la representaciones; 2) La distinción entre representaciones internas y externas; 3) El problema de la representación del elemento genérico; 4) El papel que desempeñan las representaciones de un mismo objeto en su emergencia; 5) Procesos de comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones.

8. Otros procesos: El caso de la metáfora

Es evidente que los procesos contemplados en la Figura 1 no agotan todos los procesos que intervienen en la actividad matemática. Para poner un solo ejemplo, que claramente está presente en la tarea que estamos utilizando como contexto de reflexión, vamos a considerar los procesos metafóricos. Si observamos la Figura 2 vemos que es fácil que el alumno entienda que el punto D va cambiando de posición, en lugar de entender que son puntos diferentes (esto se facilita por el hecho de que el programa Cabri mantiene siempre el mismo símbolo, la letra "D"). El alumno puede estructurar esta tarea en término de sus experiencias corporales y de movimiento, por ejemplo puede considerar que la línea recta es como una carretera por la que se desplaza un coche (el punto D), en este caso habría funcionado una metáfora conceptual del tipo "grounding" en la terminología de Lakoff y Núñez (2000), es decir una metáfora conceptual que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas.

Acevedo, Font y Bolite Frant, en diversos trabajos, han estudiado las metáforas en el discurso del profesor y en el de los alumnos aplicado al caso de la representación gráfica de funciones. En Font (2000 y 2001), Font y Acevedo (2003) y Bolite, Acevedo y Font (2005) se responde a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones?, 2)¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?, 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?, 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? Y 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? En Acevedo, Font y Bolite Frant (2006) se realiza una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico (expresión-contenido, institucional-personal, elemental-sistémica, extensivo-intensivo y ostensivo-no ostensivo). Para ello, utilizan como contexto de reflexión el objeto matemático "función" y, más en concreto, su representación gráfica.

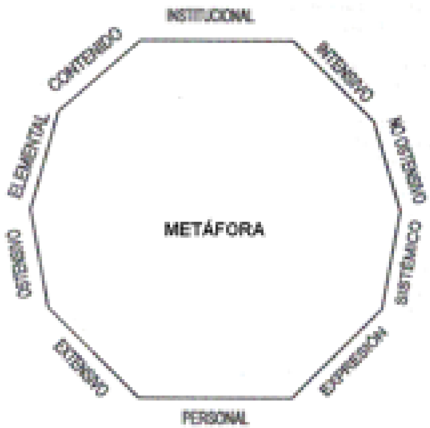


Figura 11. Miradas duales al proceso metafórico.

8.1. La metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional"

El caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo para ilustrar cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional". Por una parte, la metáfora estática "la gráfica de una función $f(x)$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales y, por otra parte, la metáfora dinámica (la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre la gráfica) es un recurso utilizado por el profesor que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos. Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente a la gráfica de una función es necesario preguntarse por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas, enmarcando esta pregunta en la dimensión dual "personal / institucional".

A partir de un análisis histórico, la respuesta es que, más que coexistencia en el plano institucional, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora estática conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual tenemos la desaparición de una a manos de la otra. Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

Si nos preguntamos por la coexistencia de ambos tipos de metáfora en el proceso de instrucción, se observa una mayor presencia de las metáforas dinámicas.

Si nos preguntamos por al coexistencia en el plano personal, se constata que el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista. Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas, hay alumnos que no logran hacerlo. Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

8.2. La metáfora con relación a la dimensión dual "extensivo / intensivo"

Una objeción importante que se puede poner a la afirmación de que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización.

Se trata de una objeción importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones sólo un análisis histórico permite afirmar que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Lakoff y Johnson (1991) consideran que tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo *A* es *B* y que ambas son los puntos extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es muy claro que *A* y *B* son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización *A* se considera un extensivo de un intensivo *B* y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si *A* y *B* son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación *A* es *B* cae en algún punto de la mitad del continuum. Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo. En Font (2007) se ilustra este proceso de fosilización para una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación.

8.3. La metáfora con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Con relación a la dimensión expresión contenido la metáfora actúa de manera icónica (Otte, 2001), puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. Una nueva metáfora (*A* es *B'*) es una expresión que permite entender los elementos de *B* (partimos previamente de la relación extensivo / intensivo *A* es *B*) como elementos de *B'*. Es decir, *A* es *B'* permite estructurar los elementos *A* de *B* en términos de *B'*. Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a *B*. Visto de esta manera la expresión *A* es *B'* se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido *B*.

8.4. La metáfora con relación a las dimensión dual "elemental / sistémica

Si bien la metáfora se presenta de manera elemental (*A* es *B*), el hecho de que ahora *B* estructure *A* permite aplicar a *A* un conjunto de prácticas que son el significado de *B*. Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

La dualidad elemental-sistémica en el caso de la metáfora ha sido puesta de manifiesto por diferentes autores. Según Black (1966) cuando usamos una metáfora tenemos en una sola expresión dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea. El significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. En “Juan es una roca” los dos pensamientos activos a la vez serían el de la fortaleza de Juan y el de la de solidez de la roca. Para Black los dos elementos vendrían a ser uno, el foco de la metáfora – el enunciado efectivo – y otro, el marco que lo rodea. Este segundo elemento ha de ser considerado como un sistema más que como una cosa individual. Cuando decimos que “la sociedad es un mar”, estamos poniendo delante de nuestros ojos, proyectando sobre la sociedad, todo un sistema conceptual en el que hay tempestades, puertos seguros, piratas, tiburones, naufragios y muchas cosas más.

En los trabajos de Lakoff y Núnez (2000) la dualidad elemental-sistémica también ocupa un lugar central. Por una parte, la metáfora es elemental (*A* es *B*), pero, por otra parte, nos permite generar un nuevo sistema de prácticas (perspectiva sistémica) como resultado de la comprensión del dominio de llegada en términos del dominio de partida. Lakoff y Núñez desarrollan la dualidad elemental sistémica para diferentes metáforas. Valga como ejemplo la metáfora del contenedor, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana (Núñez, 2000, p. 13):

- Elemental: “Las clases son contenedores”
- Sistémica: (Tabla 2).

De hecho, la mayoría de las investigaciones sobre la metáfora se han dedicado principalmente al estudio de dicha dualidad. Por ejemplo, en Bolite y otros (2004), siguiendo el modelo propuesto por Lakoff y Núñez (2000), se considera primero la metáfora elemental “los puntos son objetos físicos”.
A continuación se descompacta el dominio de partida (los objetos físicos) y el dominio de llegada (los puntos) para ver que relaciones, prácticas, etc. del dominio de partida se trasladan al dominio de llegada:

- Elemental (*A* es *B*): “Los puntos son objetos físicos”
- Sistémica: (Tabla 3).

Tabla 2

Mirada sistémica a la metáfora "Las clases son contenedores"

Dominio de partida **Esquema del contenedor**	Domino de llegada **Clases**
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 3

Mirada sistémica a la metáfora "Los puntos son objetos físicos"

Dominio de partida	Dominio de llegada
Un cuerpo físico en el espacio	Un punto en el plano cartesiano
Un coche moviéndose a lo largo de una trayectoria	Un punto que se "mueve" sobre una curva que representa a una función real
Un coche que atraviesa un túnel es el mismo cuando entra que cuando sale	Un punto que se mueve a lo largo de una curva es siempre el mismo
La trayectoria representa el movimiento	La gráfica de la pizarra es la trayectoria del punto

8.5. La metáfora con relación a las dimensión dual "ostensivo / no ostensivo"

Con relación a la dimensión dual "ostensivo / no ostensivo" la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos permitiendo la realización de inferencias.

9. Consideraciones finales

El trabajo que se presenta pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo del EOS ya que se afronta la problemática del encaje de los "procesos" dentro del marco teórico.

En este trabajo hemos mostrado como el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos considerados en el EOS permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. La herramienta "configuración epistémica" resulta útil para describir de manera estática la estructura (organización, configuración, anatomía, etc.) de un texto matemático, mientras que los procesos son herramientas que permiten profundizar en el análisis del funcionamiento (dinámica, fisiología, etc.) de la configuración epistémica activada en la realización de la práctica matemática.

Otra de las aportaciones de este trabajo consiste en una profundización sobre lo que se entiende por materialización-idealización y por particularización-generalización en el marco del EOS. Se han considerado tres maneras diferentes de generar intensivos, cada una de las cuales juega un papel diferente en las matemáticas. La abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas.

Por último queremos destacar que las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales de la Figura 1 son una buena manera de analizar la problemática de la relación entre procesos, tal como se ha puesto de manifiesto al analizar los procesos de representación y los metafóricos.

Referencias

Acevedo, J., Font, V., & Bolite Frant, J. (2006). Metáforas y funciones semióticas: El caso de la representación gráfica de funciones. En A. Contreras, L. Ordóñez, & C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 384–399). Jaén, Universidad de Jaén.

Black, M. (1966). *Modelos y metáforas*. Tecnos: Madrid.

Bolite Frant, J. et al. (2004). Reclaiming visualization: When seeing does not imply looking. *TSG 28, ICME 10*, Denmark.

Bolite Frant, J., Acevedo, J., & Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: Analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41–54.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in* Mathematics, *24*(2), 139–162.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2001). *Expresiones simbólicas a partir de gráficas: El caso de la parábola. Revista* EMA, *6*(2), 180–200.

Font, V. (2007). Cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*(2), 95–128.

Font, V., & Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor: El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las*

Ciencias, *21*(3), 405–418.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 33–52.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa, 8*(1), 67–98.

Font, V., & Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados: El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, *13*(2), 55–67.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2005). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007), An onto-semiotic approach to representations in mathematics education, *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 1–7]. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89–105.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(1), 189–210.

Godino, J. D., & Recio A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Actas PME XXI* (Vol. 2, pp. 313–320), Lahti, Finland.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.
Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7–37.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39–88.

Goldin, G., & Stheingold, X. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of* *representation in school mathematics* (pp. 1–23), Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(2), 266–281.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3–22). Hiroshima: Hiroshima University.

Otte, M. (2001). Epistemologia matemática de un ponto de vista semiótico. *Eduaçao Matemática Pesquisa*, *3*(2), 11–58.

Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected papers* (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Puig Adam, P. (1965). *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Nuevas Gráficas.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.